prof. dr hab. Agnieszka Kałamajska,
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02–097 Warszawa
*e-mail:* A.Kalamajska@mimuw.edu.pl

Warszawa, 24 lutego 2024

**Recenzja rozprawy doktorskiej**
**pt. " Zanurzenia ułamkowych przestrzeni Sobolewa na przestrzeniach metrycznych z miarą"**
**pana mgr. Artura Słabuszewskiego**

# 1 Wstępne informacje

Rozprawa doktorska pana Artura Słabuszewskiego została napisana pod kierunkiem pana dr hab. Przemysława Górki.

Dotyczy ona problemu istnienia zanurzeń, w tym zwartych zanurzeń z przestrzeni Sobolewa typu ułamkowego, zadanej na przestrzeni metrycznej, w przestrzeń typu $L^p$ lub w ułamkową przestrzeń Sobolewa. Istnienie takiego zanurzenia to punkt wyjścia, aby rozwijać teorię równań cząstkowych zadanych na strukturach ogólnych, jakimi są na przykład fraktale, grafy, lub przestrzenie Euklidesowe z niestarndardową (quasi) metryką lub miarą.

*Potrzeba* takich badań jest podyktowana przez różne modele matematyczne w naukach stosowanych. W ujęciu Euklidesowym zanurzenia wykorzystuje się do dowodzenia istnienia i regularności rozwiązań równań zdegenerowanych typu eliptycznego i parabolicznego. Dlatego teoria przestrzeni Sobolewa w ujęciu Euklidesowym była i jest obiektem zaintereoswań na przykład szkoły czeskiej, wokół A. Kufnera i B. Opica, szkoły niemieckiej stworzonej przez profesora H. Tribla, oraz rozwijanej przez D. Haroske. Badania są także prowadzone w ośrodkach polskich. Zanurzeniami dla przestrzeni Sobolewa w różnych ujęciach intersuje się szkoła wrocławska, np. Krzysztof Bogdan, Bartłomiej Dyda, czy szkoła poznańska, na przykład Leszek Skrzypczak i współpracownicy.

Nierówności typu Hardiego-Sobolewa dla przestrzeni typu ułamkowego: Słobodeckiego i Besowa, nawet w ujęciu Euklidesowym z miarami, nie doczekały się jeszcze zamkniętej teorii. Przestrzenie typu ułamkowego to także narzędzie wardzo ważne. Ich teoria powiązana jest z analizą operatorów nielokalnych i cieszy się ogromnym zainteresowaniem.

Analiza na przestrzeniach metrycznych jest *bardzo intensywnie rozwijana w ostatnich latach.* Jest ona rozwijana także przez promnotora rozprawy. Spośród znanych matematyków z ośrodków zagranicznych jest i była ona rozwijana między innymi przez: A. Alvorado, L. Ambrosio, A. J. Bjornów, J. Cheegera, P. Hajłasza, nieżyjącego już matematyka J. Heinonnena, S.V. Kanyagina, P. Koskelę, L, Malego, N Shanmugalingam, A. Volberga, Y. Zhou.

Rozprawa *wpisuje się* w nurt intensywnych badań z ostatnich lat.

*Narzędzia* pracy to żmudne i pomysłowe od strony technicznej rachunki, połączone z solidną wiedzą dotyczącą topologii, analizy funkjonalnej, teorii miary i geometrii przestrzeni metrycznych. Rozważania są precyzyjne, często zamknięte w obrębie postawionego pytania, oraz przydatne do zastosowań.

*Efektem rozprawy* jest spójne przedstawienie wyników dotyczących istnienia zanurzeń, w tym zwartych zanurzeń, dla przestrzeni Sobolewa typu ułamkowego.

*Wyniki* bazują na serii czterach prac współautorskich uzyskanych wraz z promotorem, oraz promotorem i R. Alvorado, część z nich jeszcze się nie ukazała w druku w chwili pisania recenzji.

Rozprawę uważam za wartościowy i ciekawy wkład w rozwój teorii przestrzeni Sobolewa na przestrzeniach metrycznych.

# 2 Omówienie rozprawy doktorskiej

## 2.1 Organizacja pracy oraz źródła

Rozprawa liczy 143 strony wraz z bibliografią liczącą 108 pozycji, w tym cztery pozycje - [5],[6],[51],[52] - na których bazuje rozprawa. Całość to konsekwentna i spójna analiza. Prezentacja wyników dokonuje się w kilku etapach, które z ogólnym zarysie przebiegają następująco:

**(a)** Wstępne informacje o rozprawie (Wstęp);

**(b)** Omówienie podstawowych obiektów w pracy: (Rozdział 1 - Preliminaria);

**(c)** Omówienie wyników o ciągłych zanurzeniach dla ułamkowych przestrzeni typu Sobolewa (Rozdział 2 - Ciągłe zanurzenia przestrzeni $W_s^{\alpha,p}$);

**(d)** Omówienie wyników o zwartych h zanurzeniach (Rozdział 3 - Zwarte zanurzenia);

**(e)** Bibliografia.

Wyniki włączone do dorobku rozprawy bazują na:

- dwóch wynikach trójautorskich wspólnych z promotorem oraz R. Alvorado, nie opublikowanych w momencie złożenia rozprawy:

  [5] *"Borel regularity is equivalent to Lusin's Theorem"* - praca w przygotowaniu;

  [6] *"Compact embeddings of Sobolev, Besov and Triebel-Lizorkin spaces"*, 49 str. - praca złożona do druku;

- dwóch pracach opublikowanych, wspólnych wraz z promotorem

  [51] *"Embedding of fractional Sobolev spaces is equivalent to regularity of the measure",* Studia Mathematica 268(3) (2023), 10 str.;

  [52] *"Embeddings of the fractional Sobolev spaces on metric measurable spaces"*, Nonlinear Analysis 221 (2022), 23 str.

Choć brak jest prac samodzielnych, z dostarczonych deklaracji wynika, że doktorant włożył bardzo dużo własnej pracy w uzyskanie wyników.

Wyniki są spójne tematycznie, są one przedstawione w sposób ciekawy i przejrzysty.

Organizację pracy uważam za dobrze przemyślaną, wybór źródeł jest prawidłowy, a sama rozprawa napisana jest bardzo starannie.

## 2.2 Główne wyniki, narzędzia pracy

Rozprawa w sposób spójny i konsekwentny odnosi się do problemu ciągłych i zwartych znurzeń dla ułamkowych przestrzeniach Sobolewa. Oba cele badawcze: badanie ciągłych znurzeń, oraz ich zwartość, są bardzo dobrze umotywowane i są obiektem badań w wielu ośrodkach.

**Wstęp.** Bardzo ważną rolę odgrywa rozdział *"Wstęp"*, który omawia wyniki rozprawy. Kluczowymi ułamkowymi przestrzeniami Sobolewa są: przestrzenie Słobodeckiego, Hajłasza-Sobolewa, Hajłasza-Biesowa, oraz Hajłasza - Triebla Lizorkina. Interesujące jest ich zanurzenie w przestrzenie $L^p$. Wszystkie te przestrzenie są definiowane na przestrzeniach metrycznych wyposażonych w miarę borelowską, która nie musi być niezdegenerowana. Głównym celem pracy jest analiza ciągłych i zwartych zanurzeń pomiędzy ułamkowymi przestrzeniami Sobolewa, oraz tego typu zanurzeń w przestrzenie Lebesgue'a. Rzetelnie przedstawiona jest historia badań nad własnościami tych przestrzeni, oraz dokumentujące ją pozycje w literaturze. Po wstępnym omówieniu przestrzeni następuje bardziej szczegółowe omównienie rozprawy, w tym narzędzi oraz źródeł inspiracji.
Rozdział wstępny jest ciekawy i rzetelnie zredagowany.

**Rozdział 1-Preliminaria.** Kolejnym rozdziałem jest rozdział - *Preliminaria.* Czytelnik zamoznaje się w nim z podstawami z teorii miary i topologii, oraz powiązaniami pomiędzy nimi, które okażą się kluczowe. Nie wszystkie zamieszczobne tu wyniki są klasyczne. Rozdział ten zawiera także nowe wyniki:

- Twierdzenie 20 o tym, że twierdzenie Łuzina implikuje borelowską regularność miary w niej występującej;
- Stwierdzenie 36 o równoważności warunków: (i) całkowitej ograniczoności przestrzeni $(X, d)$ (ii) dodatniości funkcji $h(r) := \inf\{\mu(B(x, r)) : x \in X\}$ (iii) warunku $\delta$ - podwajania dla miary $\mu$ (dopisałabym tutaj) "dla każdego" $\delta > 0$. Słowo "dla każdego" jest pominięte w sformułowaniu, lecz moim zdaniem wynika z dowodu;
- Twierdzenie 38, które stanowi ogólną charakteryzację zachodzenia Lematu Ascoli-Arzela, w tym równoważność z całkowitą ograniczonością przestrzeni. Łączy ono kilka znanych wcześniej implikacji oraz metod, lecz takie ujęcie jest nowe;
- Twierdzenie Hansona z pracy [6] o warunku na całkowitą ograniczoność zbioru $\mathcal{F}$ w przestrzeni funkcji mierzalnych. Tu mam zastrzeżenie do wyrażenia *"Ponadto jeśli V jest borelowski to zachodzi implikacja w drugą stronę"* w sformułowaniu twierdzenia. Nie jest jasne o którą implikację chodzi. Otóż w sformułowaniu twierdzenia występują dwie implikacje:

  *Jeśli* $(X, d)$ *jest ośrodkowa oraz* $V(...) \Longrightarrow$ *zachodzi następujący warunek na* $\mathcal{F}$ :
  *Jeśli zachodzą (i)-(iii) dla* $\mathcal{F} \Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ *jest całkowicie ograniczona.*

  Poradziłabym korektę sformułowania twierdzenia, oraz bardziej opisowe informacje (strategię) w dowodzie.

  Mam także pewne inne drobne uwagi krytyczne:

- W rozdziale 1.6, sformułowanie tezy (ii) Lematu 5.2 jest niepełne, gdyż nie jest jasne co to jest $\Psi_{r_{j+1},r_j}$. Definicję tę odnalazłam w dalszej części rozprawy, na stronie 77. Ponadto dowód tej tezy jest pominięty a czytelnik jest przekierowany do pracy [4]. Bardziej stosowne by było zastąpienie wyrażeń "powtarzając rozumowanie z [[4], konstrukcja 15]" zamieszczenie argumentacji, jej szkicu, lub choćby przekonującego kluczowego argumentu.

- W rozdziale 1.9 o przestrzeniach Hajłasza - Besowa i Hajłasza - Triebla - Lizorkina nie widzę zdań wprowadzających i chętnie dowiedzaiłabym się tutaj o źródłach i motywacjach.

Pomimo uwag także krytycznych, opracowanie tego rozdziału wymagało bardzo dużo pracy. Przedstawione są tu bardzo wnikliwe i głębokie rozważania teoretyczne na pograniczu topologii i teorii miary. Wymagają one bardzo precyzyjnych i żmudnych, technicznych oszacowań, jak na przykład Lemat 5.3 na temat iteracji oszacowań liczbowych. Wbrew nazwie *Prelminaria* - jest to rozdział badawczy.

**Rozdział 2.** Rozdział ten jest poświęcony analizie ciągłych zanurzeń dla ułamkowych przestrzeni Sobolewa. Punktem wyjścia niech będzie praca Bartłomieja Dydy [35], gdzie pokazano, że w przypadku gdy założymy (a1) oraz (b1), gdzie (a1) $\alpha p < s$, (b1) miara $\mu$ jest $s$- regularna z dołu, to zachodzą zanurzenia:

$$W_s^{m,p}(X, d\mu) \to Y \tag{1}$$

gdzie $Y = L^{p_*}(X, \mu)$ dla $p_* = sp/(s - \alpha p)$. Przedstawione zostało rozszerzenie wyniku do następujących przypadków

- gdy założenie (a1) zastąpimy przez (a2): $\alpha p > s$. W tym wypadku z miejscu $Y$ w zanurzeniu (1) występują funkcje Hölderowsko ciągłe $C^{0,\alpha-s/p}(X, d)$ (Twierdzenia 76 i 77);

- gdy założenie (a1) zastąpimy przez (a3): $\alpha p = s$. W miejscu $Y$ w zanurzeniu (1) wystąpią wtedy przestrzenie Orlicza typu ekspotencjalnego (Twierdzenia 76 i 80);

- gdy zachowane jest (a1) lecz w miejscu $Y$ w zanurzeniu (1) występują przestrzenie typu Morrey'a Campanato (Twierdzenia 76, 80);

- gdy przestrzeń $Y$ w zanurzeniu (1) to przestrzeń Hajłasza-Sobolewa (Twierdzenie 88 z Rozdziału 2.5). Choć wyniki czasem można wydedukować z innych prac, przedstawione są bezpośrednie metody dowodów, z potencjalną możliwością zastosowań.

Ponadto w Rozdziale 2.4 przedstawina została analiza optymalności warunków dla zanurzeń (1) w przestrzenie Lebesgue'a oraz Höldera.

Drugim aspektem jest przedstawienie warunków dostatecznych na miary, aby zachodziły zanurzenia (1). Kluczowy jest techniczny rozdział 2.2, gdzie oszacowana jest norma funkcji wycinającej. Następnie w rozdziale 2.3 pokazane jest, że istnienie odpowiedniego zanurzenia dla miary s- regularnej z góry implikuje jej s- regularność z dołu (Twierdzenia 82-85).

Wyniki są bogato zilustrowane przekładami i uwagami, w które włożona jest syzyfowa praca. Choć czasem nie jest to konieczne, ogromna staranność jest włożona także w oszacowania stałych. Rachunki wymagają ogromnej dokładności i cierpliwości, sprytu technicznego, oraz wiedzy na temat technik z innych prac. Analiza z tego rozdziału jest bardzo głęboka.

**Rozdział 3** dotyczy analizy zwartych zanurzeń dla ułamkowych przestrzeni Sobolewa w przestrzenie Lebesgue'a, oraz w ułamkowe przestrzenie Sobolewa. Pierwsze wyniki, w tym twierdzenia 96, 98 i 101 dotyczą zwartego zanurzenia z ułamkowych przestrzeni Hajłasza-Besowa oraz Hajłasza-Triebla-Lizorkina w przestrzenie Lebesgue'a. Nie jest jasne dla mnie sformułowanie twierdzenia 98. Twierdzenie ma następującą strukturę. Wyróżniamy w nim trzy zdania: (A),(B),(C), gdzie
(A): Niech $(X, d, \mu)$ będzie przestrzenią metryczną z miarą, ktora spełania $\mu(X) < \infty$;
(B) Wówczas (...) zanurzenia (3.15) są zwarte;
(C) Ponadto jeśli założymy (...), oraz że przynajmniej jedno z zanurzeń w (3.15) jest ciągłe, to $\mu(X) < \infty$.
Zdanie (C) potwierdza założenie ze zdania (A), oraz zakłada fragment wniosku ze zdania (B) (zanurzenia zwarte są ciągłe). Trzeba poprawić sformułowanie twierdzenia.

Twierdzenie 101 z rozdziału 3.2 to jeden z głównych wyników rozprawy. Dotyczy ono zanurzeń ułamkowych przestrzeni Hajłasza-Besowa oraz Hajłasza-Triebla-Lizorkina z miarą $\mu$ w przestrzenie Lebesgue'a wyposażone w ewentualnie inną miarę. Jest to głębokie twierdzenie z solidnym, długim dowodem. Warto zauważyć, że miary występujące w twierdzeniu nie muszą spełniać warunków typu podwajania, co wskazuje na nietrywialność rezultatów. Wynik zaopatrzony jest w wiele cennych uwag. Ciekawe są także rozważania rozdziału 3.3, które dotyczą zanurzeń z ułamkowych przestrzeni Hajłasza-Besowa oraz Hajłasza-Triebla-Lizorkina w przestrzenie tego samego typu. Bardzo interesujące jest twierdzenie 111, w którym jest między innymi pokazane, że przy bardzo ogólnych założeniach zwartość zanurzeń dla ułamkowych przestrzeni typu Sobolewa w przestrzenie Lebesgue'a jest równoważna ich zanurzeniom w przestrzenie ułamkowe Sobolewa. Choć tutaj te przestrzenie są określone dla tej samej miary, we wniosku 114, 115 i 116 znajdujemy wyniki o zanurzeniu ułamkowych przestrzeni z miarą $\mu$ w ułamkowe przestrzenie z ewnetualnie inną miarą.

Rozdział 3.4 analizuje zanurzenia dla przestrzeni typu Słobodeckiego. Twierdzenie 118 odnosi się do zwartych zanurzeń w przestrzenie Lebesgue'a, natomiast stwierdzenia 119 i 120 - do zwartości zanurzeń pomiędzy przestrzeniami Słobodeckiego.

Znajdujemy też ilustracje dotyczące optymalności zanurzeń, w tym kilkustronicowy przykład 121, informacje o sytuacji gdy przestrzeń Slobodeckiego to przestrzeń $L^p$ (twierdzenie 122), oraz solidny lemat 124, charakteryzujący niezwarte zanurzenia pomiędzy przestrzeniami Lebesgue'a.

W ostatnim rozdziale, 3.5, analizowany jest problem niezwartości zanurzeń pomiędzy ułamkowymi przestrzeniami Sobolewa i przestrzeniami Lebesgue'a. Jak się okazuje, ze zwartości zanurzeń można wywnioskować całkowitą ograniczoność przestrzeni (twierdzenie 125), lub skończoność zbiorow delta-rozdzielonych (lemat 126). Przykłady 128 oraz 129 ilustrują zwartość i niezwartość zanurzeń dla miary typu $\exp(\epsilon b^{\beta})dx$, gdzie $\epsilon \in \{+1, -1\}$, zadanej na półprostej. Bardzo ciekawy jest przykład 130 z konstrukcją przestrzeni (skomplikowany grzebień), dla której zachodzi zwartość odpowiedniego zanurzenia, lecz przestrzeń ta nie jest lokalnie całowicie ograniczona w otoczeniu żadnego punktu. Ilustracja zajmuje kilka stron solidnych rachunków i mogłaby stanowić oddzielną publikację.

Podsumowując analizę tego rozdziału zauważam, że w pracę badawczą włożony został ogromny wysiłek. Jest tu dużo nowych, głębokich i nietrywialnych, a także nie spodziewanych wyników, ktore są zaopatrzone analizą optymalności założeń, oraz sporą liczbą pouczających ilustracji.

Stosowane narzędzia pracy wymagały bardzo dużej sprawności rachunkowej i pomysłowości, oraz znajomości literatury, ponadto cierpliwości i ogromnej pracowitości. Przedstawiona analiza jest bardzo obszerna i głęboka, większość wyników to dowody pełne, zakończone ilustracjami.

Ze względu na ciekawe i głębokie wyniki otrzymane przy bogatej współpracy, oraz na bogaty dorobek całościowy, wnioskuję o wyróżnienie rozprawy.

## 3 Konkluzja

Biorąc pod uwagę dokonane osiągnięcie, po przedstawieniu zarówno pozytywnych jak i negatywnych aspektów oceny, z pełnym przekonaniem stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska w pełni spełnia wymagania zwyczajowe i ustawowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Artura Słabuszewskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Dodatkowo wnioskuję o wyróżnienie rozprawy.

Z wyrazami szacunku,

A. Kałamajska

Agnieszka Kałamajska